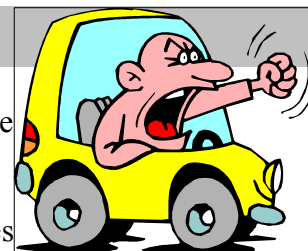


Les embouteillages



Par Jérôme RICHARD, Gwenael RIVAUX et Marien LAHAY, élèves de terminale S-si du lycée d'Altitude de Briançon.

Afin de simplifier le problème des embouteillages, on détermine certaines conditions initiales.

Conditions initiales :

- une seule file de voiture
- les voitures sont de même gabarit
- deux positions possibles : arrêt ou marche
- toutes les voitures ont la même vitesse

On modélise donc le problème sous forme de tableau où chaque ligne est un temps T différent et chaque colonne est une position différente. Une case grise représente un véhicule et une case blanche un espace vide.

	N	N+1	N+2	N+3	N+4	N+5	N+6	N+7	N+8	N+9
T=0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0

La règle locale nous donne le fonctionnement suivant :

- une voiture avance quand l'espace juste devant elle est vide.
- une voiture reste sur place quand l'espace juste devant elle est occupé.

	N	N+1	N+2	N+3	N+4	N+5	N+6	N+7	N+8	N+9	N+10	N+11
T=1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1
T=2	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0

Résolution d'un bouchon de n voitures :

On dit qu'un bouchon est *résorbé* (ou résolu) quand chaque voiture a un espace libre devant elle.

On étudie la résolution d'un bouchon comportant une suite de n voitures.

On note les n voitures 1^n

T=0	1	1	1	1	0	0
-----	---	---	-------	---	---	---	---

On obtient la résolution suivante :

	T	Exemple avec $n=6$											
À $T=0 \Rightarrow 1^n$	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
À $T=1 \Rightarrow 1^{n-1}01$	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0
À $T=2 \Rightarrow 1^{n-2}0101$	2	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0
	3	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0
À $T=k \Rightarrow 1^{n-k}(01)^k$	4	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0
	5	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0
À $T=n \Rightarrow (01)^n$	6	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

Perspectives :

On pourrait améliorer notre modèle en y ajoutant :

- plusieurs files de voitures.
- des vitesses différentes.
- des véhicules de différents gabarits.

Ce module simplifié peut devenir sujet de grandes réflexions.

Théorème :
Un bouchon de n voitures se résorbe au bout d'un temps T égal à n .

Présentation à la Cité des Sciences



Présentation à l'Université de Luminy
dans le cadre du projet Hippocampe maths.



Discussion avec leur enseignant de maths



Résolution de deux bouchons de n_1 et n_2 voitures séparées par p espaces vides :

On étudie l'évolution dans le temps de deux bouchons de n_1 et n_2 voitures séparées par p espaces vides. Plusieurs cas possibles :

Si $n_1 < p < n_2$

On obtient l'évolution suivante :

À $T=0 \Rightarrow 1^{n_1} 0^p 1^{n_2}$

À $T=1 \Rightarrow 1^{n_1-1} 0 1 0^{p-1} 1^{n_2-1} 0 1$

À $T=2 \Rightarrow 1^{(n_1-2)} (01)^2 0^{p-2} 1^{n_2-2} (01)^2$

À $T=n_1 \Rightarrow (01)^{n_1} 0^{p-n_1} 1^{n_2-n_1} (01)^{n_1}$

Le premier bouchon est résorbé, le deuxième bouchon a n_2-n_1 voitures.

À $T=p \Rightarrow (01)^{n_1} 1^{n_2-p} (01)^p$

Les voitures du premier bouchon ont rattrapé le deuxième bouchon. Ce qui crée un bouchon de n_2-p+1 voitures qui est alimenté pendant n_1-1 temps.

À $T=p+n_1 \Rightarrow 1^{n_2-p} (01)^{p+n_1}$

On retrouve un bouchon « simple » de n_2-p voitures.

Exemple avec $n_1=4, p=6$ et $n_2=8$

T	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1
	2	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0
	3	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1
n_1	4	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0
	5	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1
p	6	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0
	7	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1
	8	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
	9	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
n_1+p	10	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

Si $p < n_1 < n_2$

On obtient l'évolution suivante :

À $T=0 \Rightarrow 1^{n_1} 0^p 1^{n_2}$

À $T=1 \Rightarrow 1^{n_1-1} 0 1 0^{p-1} 1^{n_2-1} 0 1$

À $T=2 \Rightarrow 1^{(n_1-2)} (01)^2 0^{p-2} 1^{n_2-2} (01)^2$

À $T=p \Rightarrow 1^{n_1-p} (01)^p 1^{n_2-p} (01)^p$

Le deuxième bouchon est maintenant de n_2-p+1 . Il va être alimenté de manière régulière par le premier bouchon. Physiquement le deuxième bouchon va se rapprocher du premier.

À $T=n_1 \Rightarrow (01)^{n_1} 1^{n_2-p} (01)^{n_1}$

Il reste un seul bouchon de n_2-p+1 voitures qui est alimenté pendant n_1-1 temps.

À $T=p+n_1 \Rightarrow 1^{n_2-p} (01)^{p+n_1}$

On retrouve un bouchon « simple » de n_2-p voitures.

Exemple avec $p=4, n_1=6$ et $n_2=8$

T	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1
	2	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0
	3	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1
p	4	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0
	5	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1
n_1	6	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0
	7	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1
	8	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
	9	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
n_1+p	10	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
	11	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
	12	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

Si $n_1 > p > n_2$

On obtient l'évolution suivante : Le deuxième bouchon se résorbe et n'est pas alimenté par les voitures du premier bouchon (car $p > n_2$). Finalement au temps n_1 , le plus gros bouchon est résorbé.

Si $n_1 > n_2 > p$

On est très proche du cas $n_1 < p < n_2$.

À $T=p$ Les voitures du premier bouchon ont rattrapé le deuxième bouchon. Ce dernier est alimenté régulièrement, donc ne change pas de taille.

À $T=p+n_1$ On retrouve un bouchon « simple » de n_2-p voitures.

Et enfin si $p > n_1 > n_2$ ou $p > n_2 > n_1$.

Les deux bouchons ne rentreront pas en « contact ». Le temps nécessaire est alors le maximum entre n_1 et n_2 .

Finalement, on aboutit à deux théorèmes

Théorème :

Deux bouchons de n_1 et n_2 voitures séparées de p espaces vides ($p < n_2$) se résorbent à $T=n_1+n_2$.

Théorème :

Deux bouchons de n_1 et n_2 voitures séparées de p espaces vides ($p > n_2$) se résorbent à $T=\max(n_1;n_2)$.