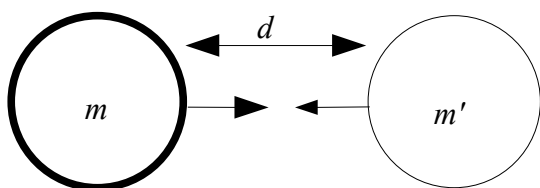


La loi de Newton

Par Nicolas KELLER, Arthur IMBERT et Bastien PENARD, élèves de première S et première GE du lycée d'Altitude de Briançon.

Quand nous avons deux planètes sphériques de masse m et m' séparées par une distance d , un théorème de mécanique, utilisé ici comme hypothèse de travail, nous dit que la force

d'attraction est alors égale à $F = \frac{mm'}{d^2}$

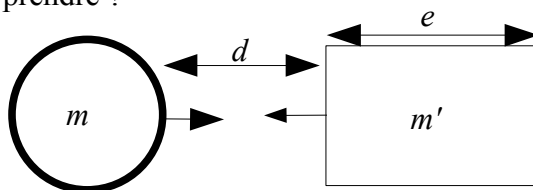


Remarque : si la distance d est grande, la force est petite et si d est petit, la force est grande.



Notre problème est le suivant :

Que se passe-t-il quand l'une des planètes n'est pas sphérique mais cylindrique ?
Quelle distance prendre ?

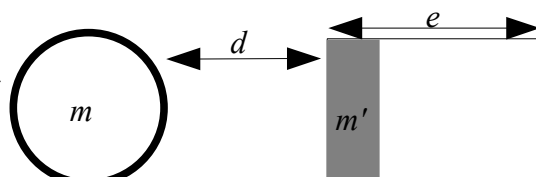


À défaut de trouver une formule, nous avons cherché un encadrement de la force. Pour les calculs, nous adoptons l'hypothèse suivante : *une tranche cylindrique très fine se comporte comme une planète sphérique de même masse et située à la même distance.*

LE MAJORANT

Pour majorer la force, on peut imaginer que toute la masse de la planète cylindrique est proche de l'autre planète. Ainsi la « distance » entre les deux masses sera minimale et la force

maximale (d'après notre remarque ci-dessus) $F \leq \frac{mm'}{d^2}$

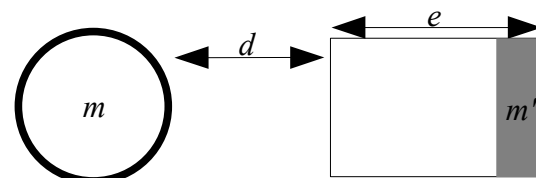


LE MINORANT

Pour ensuite calculer le minorant, il faut imaginer que la masse de la planète cylindrique est répartie de façon inverse, c'est-à-dire

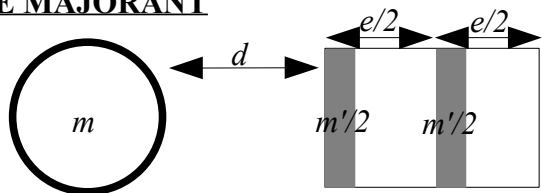
le plus loin possible de m : $\frac{mm'}{(d+e)^2} \leq F$

L'encadrement est : $\frac{mm'}{(d+e)^2} \leq F \leq \frac{mm'}{d^2}$



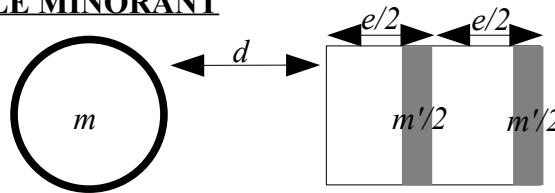
Après plusieurs séances de recherche et avec l'aide de notre enseignant, nous avons décidé de couper la planète cylindrique en deux parties égales et d'appliquer le même procédé à chaque partie.

LE MAJORANT



$$F \leq \frac{mm'}{2d^2} + \frac{mm'}{(d+\frac{e}{2})^2}$$

LE MINORANT



$$\frac{mm'}{(d+\frac{e}{2})^2} + \frac{mm'}{(d+e)^2} \leq F$$

Dans ce cas, l'encadrement est donc : $\frac{mm'}{(d+\frac{e}{2})^2} + \frac{mm'}{(d+e)^2} \leq F \leq \frac{mm'}{d^2} + \frac{mm'}{(d+\frac{e}{2})^2}$.

Ce dernier encadrement est meilleur que le premier.

En effet pour $\frac{mm'}{(d+e)^2} \leq F \leq \frac{mm'}{d^2}$, la différence fait

$$\frac{mm'}{d^2} - \frac{mm'}{(d+e)^2} \text{ et pour } \frac{mm'}{(d+\frac{e}{2})^2} + \frac{mm'}{(d+e)^2} \leq F \leq \frac{mm'}{d^2} + \frac{mm'}{(d+\frac{e}{2})^2} \text{ elle est de}$$

$$\frac{mm'}{d^2} + \frac{mm'}{(d+\frac{e}{2})^2} - \frac{mm'}{(d+\frac{e}{2})^2} - \frac{mm'}{(d+e)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{mm'}{d^2} - \frac{mm'}{(d+e)^2} \right)$$



On a réduit l'encadrement de moitié.

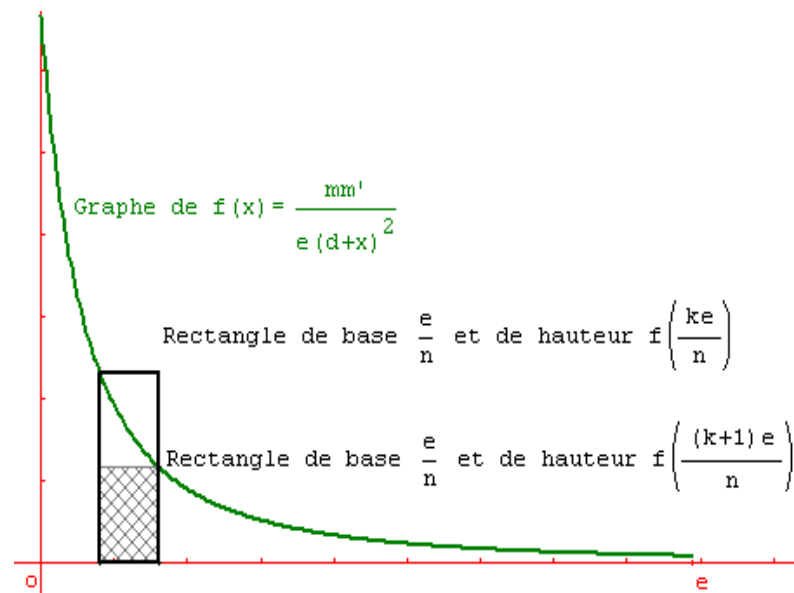
Si on découpe la planète en n morceaux égaux, on obtient l'encadrement :

$$\frac{mm'}{n(d+\frac{e}{n})^2} + \frac{mm'}{n(d+\frac{2e}{n})^2} + \dots + \frac{mm'}{n(d+\frac{ne}{n})^2} \leq F \leq \frac{mm'}{d^2} + \frac{mm'}{n(d+\frac{e}{n})^2} + \frac{mm'}{n(d+\frac{2e}{n})^2} + \dots + \frac{mm'}{n(d+\frac{(n-1)e}{n})^2}$$

[Notes de la rédaction - Comme on va le voir, l'encadrement trouvé est de plus en plus fin au fur et à mesure que n augmente : à la limite (n infini) la force F est parfaitement déterminée ; tel est le principe du *calcul intégral*.]

INTERPRÉTATION DE L'ENCADREMENT ET LIMITE QUAND n TEND VERS $+\infty$.

On trace la fonction $f(x) = \frac{mm'}{e(x+d)^2}$



L'aire d'un rectangle noire est

$$\frac{e}{n} \times \frac{mm'}{e\left(d + \frac{ke}{n}\right)^2} = \frac{\frac{mm'}{n}}{\left(d + \frac{ke}{n}\right)^2}$$

et celle d'un rectangle quadrillé est

$$\frac{e}{n} \times \frac{mm'}{e\left(d + \frac{(k+1)e}{n}\right)^2} = \frac{\frac{mm'}{n}}{\left(d + \frac{(k+1)e}{n}\right)^2}$$

Ainsi quand k varie, la somme des aires des rectangles noirs donne le majorant (ci-dessus) et la somme des aires des rectangles quadrillés donne le minorant.

La force F est donc entre ces deux surfaces (somme des rectangles noirs et somme des rectangles quadrillés). Quand n devient très grand (à la limite), l'encadrement tend vers F , c'est-à-dire l'aire sous la

courbe de la fonction f : $F = \int_0^e \frac{mm'}{e(d+x)^2} dx$.